✍ اَلفضَاء منسوب إِلَى معلم متعَامد و متجَانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

الإرتباط الخطي لشعاعين:

لإثبَات أَن الشعَاعين $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ مرتبطين خطيًا

يكفي إِثبَات أَن : $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

إثبات أن ثلاث نقط تعين مستويا:

يكفي إِثبَات أَن : اَلنقط A ، B و C ليست عَلَى إِستقَامة وَاحدة

أَي : نختَار شعَاعين و نثبت أَنهمَا غير مرتبطين خطيًا .

تطبيق:

✍ لنبين أَن النقط : $A(2;0;1)$ ، $B(3;2;0)$ و $C(-1;1;2)$ تعين مستويًا :

لدينَا : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

بمَا أَن : $\frac{-1}{1}\neq\frac{2}{-2}\neq\frac{1}{-3}$ فإن : اَلشعَاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيًا و بِالتَالي : اَلنقط A ، B و C ليست عَلَى إِستقَامة وَاحدة فهي تعين مستويًا .

المعادلة الديكارتية لمستو:

كل مستو في الفضَاء له معَادلة ديكَارتية من الشكل :

$$ax+by+cz+d=0$$

حيث : a ، b و c أَعدَاد حقيقية ليست كلهَا معدومة .

المعادلة الديكارتية لمستو معين بثلاث نقاط:

لتعيين معَادلة ديكَارتية لمستو معين بَالنقط A ، B و C ليست في استقَامية نتبع مَايلي :

1. نبحث عن شعَاع نَاظمي $\vec{n}(a;b;c)$ لِلمستوي حيث : $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$ فنحصل عَلَى معَادلة ديكَارتية لَلمستوي من الشكل : $ax+by+cz+d=0$

2. نعين قيمة العدَد الحقيقي d وذلك بتعويض إِحدَاثيات إِحدَى النقط A أَو B أَو C في المعَادلة .

تطبيق:

✍ نعين المعَادلة الديكَارتية لَلمستوي المعين بَالنقط A ، B و C المعطَاة في التَطبيق السَابق :

لدينَا : $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$

معنَاه : $\begin{cases}a+2b-c=0\\-3a+b+c=0\end{cases}$

نضع مثلَا : $a=1$ و نعوض في الجملة السَابقة ثم نستنتج قيمتي b و c بحل جملة معَادلتين لمجهولين .

نجد إِذن : $b=\frac{2}{3}$ و $c=\frac{7}{3}$

و منه نحصل عَلَى معَادلة ديكَارتية من الشكل : $x+\frac{2}{3}y+\frac{7}{3}z+d=0$

نعين d بتعويض إِحدَاثيَات A في المعَادلة نجد : $d=-\frac{13}{3}$

إِذن المعَادلة الديكَارتية لَلمستوي هي :
$x+\frac{2}{3}y+\frac{7}{3}z-\frac{13}{3}=0$

بعد نقطة عن مستو:

بعد النقطة $M_0(x_0;y_0;z_0)$ عن المستوي (P) ذي المعَادلة $ax+by+cz+d=0$ يعطَى بَالقَانون :

$$d(M_0;(P))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

تطبيق:

✍ نعين المسَافة بين النقطة $A(-1;2;3)$ و المستوي (P) ذو المعَادلة $(P):x+2y-2z+1=0$:

$$d(A;(P))=\frac{|1\times(-1)+2\times2+(-2)\times3+1|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}}$$

أَي : $d(A;(P))=\frac{2}{\sqrt{9}}=d(A;(P))=\frac{2}{3}$

التمثيل الوسيطي لمستقيم :

اَلمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $A(x_A;y_A;z_A)$ و شعَاع توجيهه $\vec{u}(a;b;c)$ تمثيله الوسيطي من الشكل :

$$\begin{cases}x=x_A+at\\y=y_A+bt\,,\ t\in\mathbb{R}\\z=z_A+ct\end{cases}$$

تطبيق:

✍ اَلتمثيل الوسيطي لَلمستقيم (D) الذي يشمل $A(2;-1;3)$ و شعَاع توجيه له $\vec{u}(-1;2;3)$ هو :

$$\begin{cases}x=2-t\\y=-1+2t\,,\ t\in\mathbb{R}\\z=3+3t\end{cases}$$

التمثيل الوسيطي لمستو :

✍ المستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(x_A;y_A;z_A)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(\alpha;\beta;\gamma)$ تمثيله الوسيطي من الشكل :

$$\begin{cases} x = x_A + at + \alpha S \\ y = y_A + bt + \beta S \;,\; t \in \mathbb{R}; S \in \mathbb{R} \\ z = z_A + ct + \gamma S \end{cases}$$

تطبيق:

✍ التمثيل الوسيطي للمستوي (P) الذي يشمل $A(2;-1;3)$ و $\vec{u}(-1;2;3)$ و $\vec{v}(2;1;-2)$ شعاع توجيه له هو :

$$\begin{cases} x = 2 - t + 2S \\ y = -1 + 2t + S \;,\; t \in \mathbb{R}; S \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 3t - 2S \end{cases}$$

الوضعية النسبية لمستويين في الفضاء:

✍ ليكن (P) و (P') المستويين المعرفين بمعادلتيهما كما يلي :

$(P): ax+by+cz+d=0$ و $(P'): a'x+b'y+c'z+d'=0$

.1 إذا كان : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$ فإن : (P) و (P') منطبقان .

.2 إذا كان : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$ فإن : المستويين (P) و (P') متوازيان تماما .

.3 إذا كان التناسب : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ غير محقق فإن : المستويين (P) و (P') يتقاطعان وفق مستقيم .

ملاحظة:

إذا انعدمت إحدى المركبات فلا نكتب النسبة التي انعدم مقامها و للحفاظ على التوازي يجب انعدام النسب الأخرى .

الوضعية النسبية لمستقيمين في الفضاء:

✍ ليكن (D) مستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}$ و (D') مستقيم شعاع توجيهه $\vec{v}$

.1 إذا كان : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطيا فإن : المستقيمين (D) و (D') متوازيان (إما منطبقان أو متوازيان تماما)

ملاحظة:

إذا إشتركا في نقطة على الأقل فهما منطبقان و إلا فهما متوازيان تماما .

.2 إذا كان : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا فإن : المستقيمين (D) و (D') متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي .

الوضعية النسبية لمستقيم و مستو في الفضاء:

✍ ليكن (D) مستقيم شعاع توجيهه $\vec{u}$ و (P) مستو شعاعه الناظمي $\vec{n}$

.1 إذا كان : $\vec{u}$ و $\vec{n}$ متعامدان فإن : المستقيم (D) و المستوي (P) متوازيان أو (D) محتو في (P)

ملاحظة:

نأخذ نقطة كيفية من المستقيم و نعوضها في معادلة المستوي فإذا حققت المعادلة نقول إن : (D) محتو في (P) و إلا فهما متوازيان تماما .

.2 إذا كان : $\vec{u}$ و $\vec{n}$ غير متعامدين فإن : المستقيم (D) و المستوي (P) متقاطعان في نقطة .

تقاطع ثلاث مستويات في الفضاء:

✍ لدراسة تقاطع ثلاث مستويات في الفضاء يمكن أن ندرس تقاطع مستويين منهما :

- إذا كانا متوازيين تماما فنقول إن : تقاطع المستويات الثلاث خال .
- إذا كانا متقاطعين فإن : تقاطع المستويات الثلاث يصبح عبارة عن تقاطع مستقيم و مستو .

معادلة سطح كرة في الفضاء:

معادلة سطح الكرة (S) ذات المركز $\Omega(x_0;y_0;z_0)$ و نصف القطر r تكتب :

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$$

الوضعية النسبيةلسطح كرة ومستو في الفضاء:

✍ (P) مستو و (S) سطح كرة مركزها Ω و نصف قطرها r .

.1 $d(\Omega;(P)) > r$ فإن : (P) لا يقطع (S)

.2 $d(\Omega;(P)) = r$ فإن : (P) يمس (S) في نقطة وحيدة

.3 $d(\Omega;(P)) < r$ فإن : (P) يقطع (S) في دائرة

العناصر المميزة في الحالتين 2 و 3:

✍ الحالة 2 : نعين نقطة التماس H باعتبارها نقطة تقاطع المستوي (P) مع المستقيم (ΩH)

✍ الحالة 3 :

ـ نعين w مركز الدائرة باعتبارها نقطة تقاطع المستوي (P) مع المستقيم (Ωw)

ـ نعين نصف القطر ρ لدائرة التقاطع بالعلاقة التالية :

$$\rho = \sqrt{r^2 - d^2}$$

حيث: r نصف قطر سطح الكرة و d يرمز إلى $d(\Omega;(P))$

الأستاذ : بلبحري كمال